15/1/19

<u>Ακρότατα πραγμ. συναρτήσεων περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών</u>

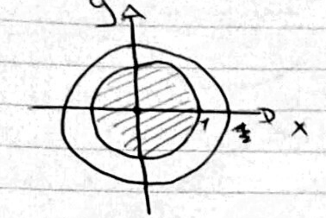
$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Αν $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και f: συνεχής, τότε αυτή έχει ακρότατα.

<u>Παρατήρηση</u>: Η αναγκαία και ικανή συνθήκη που είδαμε εφαρμόζεται <u>μόνο</u> αν U: ανοικτό (ή για την $f|\mathring{U}$) και αν π.χ. $f \in C^2(U)$

(ή $f|\mathring{U} \in C^2(\mathring{U})$)

Π.Χ.: Θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της
$f(x,y) = xy$, $\quad (x,y) \in \bar{B}((0,0),1)$
$[f : \underbrace{\bar{B}((0,0),1)} \to \mathbb{R}]$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , \ x^2+y^2 \le 1\}$: συμπαγές



$$B \text{ συμπαγές} \begin{cases} (\alpha) & B := \bar{B}((0,0),1) \subset B((0,0),r) \ \forall r>1 \\ & \Rightarrow B : \text{φραγμένο} \Leftrightarrow x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0 \\ (\beta) & B : \text{κλειστό} \ [\underbrace{(x_\nu,y_\nu)}_{\in B} \to (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Θνδο: $(x_0,y_0) \in B \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2 \le 1$

Πράγματι, $\left.0 \le \underbrace{x_\nu^2+y_\nu^2}_{=x_0^2+y_0^2} \le 1 \right\} \Rightarrow x_0^2+y_0^2 \in [0,1]$

Από τα προηγούμενα, ξέρουμε ότι $\exists$ σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f [αφού αυτή είναι συνεχής:
$(x_\nu,y_\nu) \to (x,y) \Leftrightarrow x_\nu \to x \wedge y_\nu \to y \Rightarrow f(x_\nu,y_\nu) \to f(x,y)$]
ΑΠΕΙ1

Επίσης από τη θεωρία για ακρότατα σε ανοιχτά σύνολα μπορώ εύκολα να εξετάσω τι συμβαίνει για την $f|_{B((0,0),1)}$ Αφού $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

[αφού $\exists$ μερικές παράγωγοι οσοδήποτε μεγάλης τάξης (η f είναι πολυώνυμο του $(x,y) \Rightarrow$ πολυώνυμο ως προς x και y)]

$\to$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (y,x) = (0,0)$

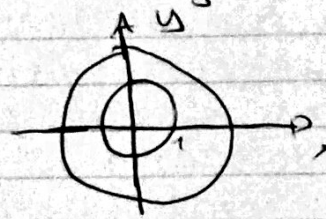
$\Rightarrow$ το μοναδικό σημείο πιθανού ακροτάτου της $f|_{B((0,0),1)}$ είναι το $(0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} y & \frac{\partial}{\partial x} y \\ \frac{\partial}{\partial x} x & \frac{\partial}{\partial y} x \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ορισμένος ? (ΑΣΚΗΣΗ)

[Έστω $y = y_0 > 0$, $y_0 << 1$

καταλήγουμε ότι στο $(0,0)$ η f δεν έχει ακρότατο (και σε όλο το $B((0,0),1)$ δεν έχει ακρότατο $\Rightarrow$ Η $f: \bar{B}((0,0),1) \to \mathbb{R}$: $f(x,y) = xy$ έχει ακρότατο που βρίσκεται στο $\partial B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ (εκεί όμως δε μπορώ να δουλεύω με ∇f, Hf, αφού $\partial B((0,0),1)$)



[$x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0$

$\Rightarrow \underbrace{x_\nu^2 + y_\nu^2}_{=1} \to \underbrace{x_0^2 + y_0^2}_{=1}$]

Ιδιοτιμές του $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ μη-ορισμένο

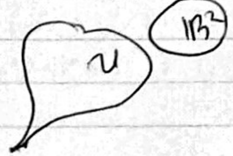
$\Rightarrow$ στο $(0,0)$ η f έχει σαγματικό σημείο

→ Πώς μπορώ βρω τα ακρότατα της $f(x,y) = xy$ για $(x,y) \in \partial B((0,0),1)$?

$\boxed{\text{Απάντηση}}$ <u>Θεώρημα πολλαπλασιαστών Lagrange</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, και $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$, $1 \leq r \leq n-1$. Λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο από τη συνθήκη $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$ στο σημείο $\bar{x}_0 \in M := \{\bar{x} \in U : \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}\}$ αν η $f|_M$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\bar{x}_0$

<u>Παράδειγμα</u>: Η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο (x_0,y_0), όπου αν η f περιορισμένη στο σύνολο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ έχει ακρότατο (υπό τη συνθήκη $g(x,y)=0$) για δεδομένο $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



<u>Π.χ.</u> $U = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (xy)$, $g(x,y) = x^2+y^2-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η f έχει τοπικό ακρότατο υπό τη συνθήκη: $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow g(x,y)=0$ $(g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ στο σημείο $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $x_0^2+y_0^2=1$ αν η $f|_{\partial B((0,0),1)}$ έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο (x_0,y_0).

<u>Ακόμα πιο απλά</u>: μια συνθήκη $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$ μου δίνει ένα υποσύνολο M του πεδίου ορισμού $U \subset \mathbb{R}^n$ μιας συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$ και θέλω να βρω το τοπικό ακρότατο της $f|_M$

Θεώρημα (πολλαπλασιαστών Lagrange): Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ και $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$, $1 \le r \le n-1$

διαφορίσιμες. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\bar{x_0} \in M = \{\bar{x} \in U : \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}\}$ υπό τη συνθήκη $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0} \iff \begin{cases} g_1(\bar{x}) = 0 \\ g_r(\bar{x}) = 0 \end{cases}$

και η παράγωγος της $\bar{g}$ στο $\bar{x_0}$:

$$D\bar{g}(\bar{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x_0}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x_0}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\bar{x_0}) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n}(\bar{x_0}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n}$$

έχει βαθμίδα (rank) r τότε $\exists$ r πραγματικοί αριθμοί (πολλαπλασιαστές Lagrange) $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ έτσι ώστε για $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ ισχύει $\nabla f(\bar{x_0}) = \bar{\lambda}^T D\bar{g}(\bar{x_0}) =$

$$= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \nabla g_1(\bar{x_0}) \\ \vdots \\ \nabla g_r(\bar{x_0}) \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda_1}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\nabla g_1(\bar{x_0})}_{\in \mathbb{R}^n} + \dots + \lambda_r \nabla g_r(\bar{x_0})$$

! Από αυτό το θεώρημα προκύπτει για $\boxed{n=2}$ ($\Rightarrow r=1$) η ακόλουθη μέθοδος εύρεσης ακροτάτων στο $M = \{(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ μιας $f: \underbrace{U}_{\in \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$:

① Επιλύουμε ως προς (x, y, λ) το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda \nabla g(x,y) = \nabla f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

έχει βαθμίδα (rank) r, τότε $\exists$ r πραγματικοί αριθμοί (πολλαπλασιαστές Lagrange) $\bar{\lambda}=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^T \in \mathbb{R}^r$ έτσι ώστε για $\bar{\lambda}=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^T$ να ισχύει $\underbrace{\nabla f(\bar{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^n} = \bar{\lambda}^T \nabla \bar{g}(\bar{x}_0) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)\begin{pmatrix} \nabla g_1(\bar{x}_0) \\ \nabla g_r(\bar{x}_0)\end{pmatrix} =$

$$= \underbrace{\lambda_1}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\nabla g_1(\bar{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^n} + \ldots + \lambda_r \nabla g_r(\bar{x}_0)$$

βρίσκω στάσιμα σημεία

→ Από αυτό το θεώρημα προκύπτει για $\boxed{n=2}$ ($\Rightarrow r=1$) η ακόλουθη μέθοδος εύρεσης ακροτάτων στο $M=\{(x,y)\in U \subset \mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}$ μιας $f: \underbrace{U}_{\in \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$, πχ $f(x,y)=xy$, πχ $g(x,y)=x^2+y^2-1$

(1) Επιλύουμε ως προς (x,y,λ) το σύστημα $\begin{cases} \lambda \nabla g(x,y) = \nabla f(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

(2) Κρατάω τα τμήματα (x,y) αυτών των λύσεων ως υποψήφια σημεία τοπικών ακροτάτων, αν σε αυτά τα υποψήφια σημεία $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$

(3) Βρίσκουμε τα σημεία (x,y) με $g(x,y)=0$ και $\nabla g(x,y)=(0,0)$

(4) Εξετάζουμε εάν σε κάποιο από αυτά τα σημεία η $f/\{g(x,y)=0\}$ έχει ακρότατο.

Παράδειγμα $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$

θέλω να βρω τα ακροτ. της f στον κύκλο $x^2+y^2=1$

$\Leftrightarrow g(x,y)=0$ με $g(x,y)=x^2+y^2-1$

(1) λύνω το σύστημα $\begin{cases} \lambda \nabla g(x,y) = \nabla f(x,y) \Leftrightarrow \lambda(2x,2y)=(y,x) \\ \underbrace{g(x,y)=0}_{\Leftrightarrow x^2+y^2=1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow y=2\lambda x \quad x=2\lambda y, \quad x^2+y^2=1 \Rightarrow 4\lambda^2(x^2+y^2)=4\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4\lambda^2y^2+4\lambda^2x^2 = 4\lambda^2\underbrace{(x^2+y^2)}_{=1}=1 \Rightarrow y=\pm x$

$\Rightarrow x^2+y^2=1=2x^2 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

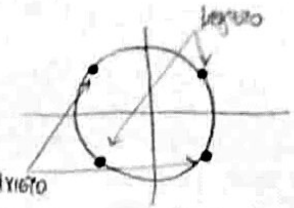
⇒ Βρήκα ως λύσεις του συστήματος τα εξής υποψήφια σημεία

(2) $(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$

[$\nabla g(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$ για όλα τα σημεία $x^2+y^2=1$]

(3) Δεν έχει επιπλέον σημεία

(4) Τα ακρότατα της f περιορισμένης στον κύκλο θα είναι αναγκαστικά μεταξύ αυτών των σημείων



Αφού [$f(x,y) = xy$] $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$

και $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Θα μπορούσαμε να βρούμε τα ακρότατα της $f(x,y) = xy$ πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=1$ βρίσκοντας τα ακρότατα των συναρτήσεων μιας μεταβλητής $g_{\pm}(x) := f(x, \pm\sqrt{1-x^2})$ για $x \in [-1,1]$

Ασκήσεις: Αυτές τις σημειώσεις (αλλά και ΜΤ) για $\boxed{n=2}$

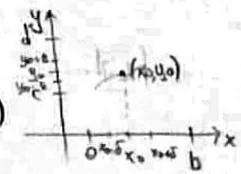
$\boxed{\text{Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, για } n=m=1}$ → όχι το πιο γενικό

Πρόταση: Έστω $F:(a,b)\times(c,d) \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και έστω $(x_0,y_0) \in (a,b)\times(c,d)$ με $F(x_0,y_0) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Τότε, $\exists\, \delta, \varepsilon > 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$

$\exists!\, g(x) \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon) \subset (c,d)$

με $F(x,g(x)) = 0$ και $g: (x_0-\delta, x_0+\delta) \to (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ συνεχώς διαφορίσιμη με $\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x)) \neq 0$



και $g'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))} \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Λέμε ότι η συνάρτηση g ορίζεται πεπλεγμένα μέσω της εξίσωσης $F(x,y) = 0$, αφού προκύπτει η g ως λύση της $F(x,y) = 0$ ως προς y

<u>π.χ.</u> Δ.ο. για αρκετά μικρό $x \in \mathbb{R}$ (δηλ. κοντά στο 0) υπάρχουν μικρές μοναδικές λύσεις (δηλ κοντά στο 0) $y(x)$ τη εξίσωση $e^{\sin(x,y)} + x^2 - 2y - 1 = 0$ και υπολογίστε την $y'(x)$ ως συνάρτηση του x και $y(x)$.

<u>Λυση</u>: για $(x_0,y_0) = (0,0)$ έχουμε $F(x,y) = e^{\sin(x,y)} + x^2 - 2y - 1$

$F(0,0) = 0$ [το σημείο $(0,0)$ λύνει την $F(x,y)=0$]

και $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \cdot \cos(0,0) \cdot 0 + 0 - 2 - 0 = -2 \neq 0$.

$\Rightarrow \exists\, \delta, \varepsilon > 0 \; \exists!\, (-\delta,\delta) \mapsto (-\varepsilon,\varepsilon)$ με $F(x,y(x)) = 0$.

ΟΠΣ

<u>Άσκηση</u>: Τι συμβαίνει, ποιες συναρτήσεις του x ορίζονται γύρω απο το $x=0$ για την $F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$